ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ (ПФ)

**Определения:**

I. Прямое ПФ:

$$F(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dx\,dy \quad \Leftrightarrow \quad F(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f(x,y)\}$$

II. Обратное ПФ:

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi\,d\eta \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y)=\hat{\mathcal{F}}^{-1}\{F(\xi,\eta)\}$$

III. Свертка:

$$f_1(x,y)\otimes f_2(x,y)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(p,q)f_2(x-p,y-q)dp\,dq$$

IV. Корреляция:

$$f_1(x,y) ✪ f_2\ (x,y)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(p,q)f_2^*(p-x,q-y)dp\,dq$$

**Свойства:**

1. Теорема линейности:

   Если $F_i(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f_i(x,y)\}$, то $\hat{\mathcal{F}}\left\{\sum_i c_i f_i(x,y)\right\}=\sum_i c_i F_i(\xi,\eta)$

2. Теорема подобия:

   Если $F(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f(x,y)\}$, то $\hat{\mathcal{F}}\{f(ax,by)\}=\frac{1}{ab}F\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)$

3. Теорема смещения:

   Если $F(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f(x,y)\}$, то $\hat{\mathcal{F}}\{f(x-x_0,y-y_0)\}=F(\xi,\eta)e^{-i(\xi x_0+\eta y_0)}$

4. Теорема Парсеваля:

   Если $F(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f(x,y)\}$, то $(2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi,\eta)|^2d\xi\,d\eta$

5. Теорема свертки:

   Если $F_i(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f_i(x,y)\}(i=1,2)$, то $\hat{\mathcal{F}}\{f_1(x,y)\otimes f_2(x,y)\}=F_1(\xi,\eta)\cdot F_2(\xi,\eta)$

   Обратная: $\hat{\mathcal{F}}\{f_1(x,y)f_2(x,y)\}=\frac{1}{(2\pi)^2}F_1(\xi,\eta)\otimes F_2(\xi,\eta)$

6. Теорема взаимной корреляции:

   Если $F_i(\xi,\eta)=\hat{\mathcal{F}}\{f_i(x,y)\}(i=1,2)$, то $\hat{\mathcal{F}}\{f_1(x,y)\star f_2(x,y)\}=F_1(\xi,\eta)\cdot F_2^*(\xi,\eta)$

   Автокорреляция: $\hat{\mathcal{F}}\{f(x,y)\star f(x,y)\}=|F(\xi,\eta)|^2$

7. Свойства симметрии:

   Если $f(x,y)=f^*(x,y)$, то $F(\xi,\eta)=F^*(-\xi,-\eta)$

   Следствия:

   а). Если $f(x,y)$ – действительная и четная, то $F(\xi,\eta)$ тоже действ. и четная;

   б). Если $f(x,y)$ – действительная и нечетная, то $F(\xi,\eta)$ – мнимая и нечетная.

ФУРЬЕ-ОБРАЗЫ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

| $f(x)$ | $F(\xi)$ |
|---|---|
| $\delta(x)$ | $1$ |
| $1$ | $2\pi\delta(\xi)$ |
| $\sin\xi_0 x$ | $-i\pi[\delta(\xi-\xi_0)-\delta(\xi+\xi_0)]$ |
| $\cos\xi_0 x$ | $i\pi[\delta(\xi-\xi_0)+\delta(\xi+\xi_0)]$ |
| $\exp\left(-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ | $a\sqrt{\pi}\exp\left(-\dfrac{1}{4}\xi^2a^2\right)$ |
| $\mathrm{rect}(x\,\vert\,a)$ | $a\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{1}{2}\xi a\right)$ |
| $\mathrm{sgn}\,x$ | $-\dfrac{2i}{\xi}$ |