Лекция 6
Измерение ВФ в адаптивной оптике III

Содержание

1 Разложение ВФ по функциям отклика корректора

1.1 Равнозначные субапертуры

В системах АО с модальными корректорами ВФ часто необходимо определять не сам профиль корректируемого пучка, а коэффициенты его разложения по функциям отклика управляемого зеркала [1]. Фазу светового пучка в этом случае удобно представлять в виде:

$$\varphi(\vec{r},t)=\sum_{i=1}^{N} a_i(t)S_i(\vec{r}), \tag{1}$$

где $S_i(\vec{r})$ — функции отклика корректора на единичное управляющее воздействие, $a_i(t)$ — коэффициенты разложения. Аналогичное выражение описывает и форму поверхности корректора; поэтому коэффициенты $a_i(t)$ можно непосредственно использовать для управления зеркалом по соответствующим степеням свободы.

Цель: необходимо по измеренным в заданных точках локальным наклонам волнового фронта (т. е. по градиентам фазы) определить с минимально возможными погрешностями вектор $=\{a_i(t)\}$ коэффициентов разложения (1).

Векторная форма МНК. Пусть датчик измеряет градиенты фазы в точках r_k, $k = 1, \ldots,$. Введем вектор оценок градиентов $\tilde{\mathbf{g}}$, элементами которого являются частные производные фазы:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \{\varphi'_x(\mathbf{r}_1), \ldots, \varphi'_x(\mathbf{r}_M), \varphi'_y(\mathbf{r}_1), \ldots, \varphi'_y(\mathbf{r}_M)\}. \tag{2}$$

Для вектора $\tilde{\mathbf{g}}$ из разложения (1) следует

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbb{P}\mathbf{a}, \tag{3}$$

где элементы матрицы $\mathbb{P} = \{p_{ki}\}$ определяются через производные функций $S_i(\mathbf{r}_k)$:

$$p_{k,i} = \frac{\partial S_i}{\partial x}(\mathbf{r}_k) \qquad p_{k+M,i} = \frac{\partial S_i}{\partial y}(\mathbf{r}_k) \qquad k = 1, \ldots, M, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

Обозначим через $\mathbf{g}$ вектор градиентов фазы, измеряемых датчиком волнового фронта в точках $\{\mathbf{r}_k\}$: $g_1, \ldots, g_M$ — производные по ; $g_{M+1}, \ldots, g_{2M}$ — производные по . Сумму квадратов невязок между градиентами, вычисленными по формулам (3), и измеренными значениями выразим в векторном виде:

$$\mathbf{J}^2 = (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g})^T(\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}), \tag{5}$$

где $(\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g})$ — вектор невязок. Используя (3), для $\mathbf{J}^2$ получаем матричное выражение

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{a}^T\mathbb{P}^T\mathbb{P}\mathbf{a} + \mathbf{g}^T\mathbf{g} - \mathbf{a}^T\mathbb{P}^T\mathbf{g} - \mathbf{g}^T\mathbb{P}\mathbf{a}. \tag{6}$$

Для определения вектора $\mathbf{a}_0$, при котором квадратичная форма $\mathbf{J}^2$ достигает минимума, необходимо приравнять к нулю ее частные производные по переменным a_i. Таким образом, из (6) получаем

$$\mathbb{P}^T\mathbb{P}\mathbf{a}_0 = \mathbb{P}^T\mathbf{g}. \tag{7}$$

Эта система содержит N уравнений для N неизвестных и может быть решена известными методами линейной алгебры. Отметим, что для ее решения нет необходимости привлекать дополнительные условия (как это делалось в Лекции 5). Искомый вектор $\mathbf{a}_0$ прямо выражается через вектор измеренных градиентов с помощью обратной матрицы:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbb{Q}\mathbf{g}, \qquad \mathbb{Q} = \left(\mathbb{P}^T\mathbb{P}\right)^{-1}\mathbb{P}^T. \tag{8}$$

Матрица $\mathbb{Q}$ не зависит от измеряемых величин и может быть вычислена до проведения измерений. В теории матриц $\mathbb{Q}$ называется обобщенной обратной матрицей Мура- Пенроуза [2].

1.2 Неравнозначные субапертуры

Иногда целесообразно использовать более общую форму для суммы квадратов невязок $\mathbf{J}^2$, чем та, которая определяется соотношением (5). Информация о локальных наклонах с различных субапертур датчика обладает разной достоверностью. Это может быть, например, связано с тем, что субапертуры датчика располагаются в узлах квадратной сетки, в то время как у подавляющего числа оптических систем сечение пучка имеет круглую или кольцевую форму. При этом элементы датчика, расположенные на краях апертуры, обычно частично затемнены —

поэтому относительный уровень погрешностей измерений на таких субапертурах выше, чем на внутренних.

Для учета степени достоверности измерений на разных субапертурах компонентам $(\tilde{\mathbf{g}}-\mathbf{g})_i$ вектора невязок удобно приписать различные статистические веса. С учетом этого выражение (5) запишется в виде

$$\mathbf{J}^2 = (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g})^T \mathbb{W} (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}). \tag{9}$$

В простейшем случае положительно определенная матрица $\mathbb{W}$ может быть диагональной. В этом случае ее диагональные элементы w_{ii} и определяют статистический "вес с которым мы собираемся учитывать измерения на i-ой субапертуре. При этом вместо (7) получим

$$\mathbb{P}^T \mathbb{W} \mathbb{P} \mathbf{a}_0 = \mathbb{P}^T \mathbb{W} \mathbf{g}. \tag{10}$$

Вектор $\mathbf{a}_0$ будет определяться выражением, аналогичным (8):

$$\mathbf{a}_0 = \left(\mathbb{P}^T \mathbb{W} \mathbb{P} \right)^{-1} \mathbb{P}^T \mathbb{W} \mathbf{g}. \tag{11}$$

1.3 Обусловленность системы

Коэффициенты при неизвестных a_i в (7) и (10) зависят от вида функций отклика корректора $S_i(\mathbf{r})$ и выбора точек $\mathbf{r_k}$ измерения градиента. При некотором выборе этих параметров система (7) или (10) м.б. плохо обусловленной и ее определитель будет близок к нулю. В таком случае улучшить ситуацию можно, например, изменив расположение точек измерения градиентов.

2 Учет априорной информации при восстановление ВФ

2.1 Основные положения

Фазовые флуктуации имеют известную статистику, можно ли повысить точность восстановления ВФ (или вычисления коэффициентов a_i в (1)) если учесть эту информацию?

Статистика фазовых искажений — гауссова (почему?), а значит, и коэффициенты a_i в разложении (1)) — гауссовы.

Напомним, если a_i – гауссовы и

$$\langle a_i \rangle = 0, \quad \langle a_i a_j \rangle = C_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\mathbb{C}$ – ковариационная матрица, то плотность вероятности распределения вектора $\{\mathbf{a}\}$ имеет вид:

$$P(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbb{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbb{C}^{-1} \mathbf{a} \right) \tag{12}$$

Формула Байеса. Пусть имеется случайный вектор $\mathbf{a}$, а измеряем мы вектор $\mathbf{g}$. Плотность вероятности совместного распределения выражается через условные вероятности:

$$P(\mathbf{a},\mathbf{g}) = P(\mathbf{a}|\mathbf{g})P(\mathbf{g}) = P(\mathbf{g}|\mathbf{a})P(\mathbf{a}) \tag{13}$$

здесь $P(\mathbf{a}|\mathbf{g})$ и $P(\mathbf{g})$ — апостериорные вероятности, $P(\mathbf{a})$ — априорная вероятность, $P(\mathbf{g}|\mathbf{a})$ — функция правдоподобия. Задача заключается, как правило, в нахождении апостериорной вероятности $P(\mathbf{a}|\mathbf{g})$.

2.2 Байесовский подход в фазовых измерениях

Шаг 1. Вектор $\mathbf{g}$ уже измерен, и для данных конкретных измерений $P(\mathbf{g}) = 1$, тогда:

$$P(\mathbf{a}|\mathbf{g}) = P(\mathbf{g}|\mathbf{a})P(\mathbf{a}) \tag{14}$$

— апостериорная вероятность получить вектор $\mathbf{a}$, если измерения дали вектор $\mathbf{g}$.
Шаг 2. Сопоставим вектору $\mathbf{a}$ некоторый «идеальный» вектор измерений $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbb{P}\mathbf{a}$, где $\mathbb{P}$ — матрица преобразования. Теперь можно сказать:

$$P(\mathbf{g}|\mathbf{a}) = P(\mathbf{g}|\tilde{\mathbf{g}}). \tag{15}$$

Связь между $\mathbf{g}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{n}, \\ \langle n_i \rangle = 0; \quad \langle n_i n_j \rangle = \delta_{ij}\sigma_i^2, \\ P(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^M \sqrt{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{2M}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}^T \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{n}\right) \end{cases} \tag{16}$$

Где $\mathbf{n}$ — вектор шумов измерений, $\mathbf{\Sigma}$ — ковариационная матрица флуктуаций. Так как $\mathbf{n} = \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}$, то $P(\mathbf{n}) = P(\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}})$ — функция правдоподобия (15). Теперь из (16) и (12) получим выражение для апостериорной вероятности $P(\mathbf{a}|\mathbf{g})$. (Для студентов):

$$\begin{cases} P(\mathbf{a}|\mathbf{g}) = P(\mathbf{g}|\mathbf{a})P(\mathbf{a}) = P(\mathbf{g}|\tilde{\mathbf{g}})P(\mathbf{a}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}) - \frac{1}{2}\mathbf{a}^T \mathbb{C}^{-1}\mathbf{a}\right]}{(2\pi)^M \sqrt{(2\pi)^N \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{2M}^2 \det(\mathbb{C})}}, \\ \tilde{\mathbf{g}} = \mathbb{P}\mathbf{a}. \end{cases} \tag{17}$$

Имея выражение для плотности распределения апостериорной вероятности $P(\mathbf{a}|\mathbf{g})$, можно получить оценку для вектора $\mathbf{a}$, например: среднее значение распределения (или наиболее вероятное, или медианное значение).

2.3 Сравнение байесовского подхода и МНК

Выберем в качестве оценки для вектора $\mathbf{a}$ наиболее вероятное значение, как и в методе наименьших квадратов. Для его нахождения приравняем нулю производную $P(\mathbf{a}|\mathbf{g})$ по $\mathbf{a}$. В результате получаем соотношение:

$$\mathbb{P}^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbb{P}\mathbf{a} - \mathbf{g}) + \mathbb{C}^{-1}\mathbf{a} = 0 \quad \to \quad \left(\mathbb{P}^T \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbb{P} + \mathbb{C}^{-1}\right)\mathbf{a} = \mathbb{P}^T \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{g}. \tag{18}$$

Для простоты предположим, что дисперсии σ_i^2 шумов измерений всех компонент вектора $\mathbf{g}$ в (16) одинаковы, в этом случае матрица ковариаций $\mathbf{\Sigma}$ пропорциональна единичной $\mathbb{E}$ и уравнение (18) принимает вид:

$$\left(\mathbb{P}^T\mathbb{P} + \sigma^{4M}\mathbb{C}^{-1}\right)\mathbf{a} = \mathbb{P}^T\mathbf{g}. \tag{19}$$

Полученное уравнение отличается от (7) слагаемым $\sigma^{4M}\mathbb{C}^{-1}$ в матрице, которая умножается на вектор $\mathbf{a}$.
Вывод: оценка вектора $\mathbf{a}$, которая получается из решения (19) в результате применения байесовского подхода, существенно отличается от решения уравнения (7), использующего МНК, если велики шумы измерений градиентов фазы (значение σ^{4M}).

3 Задания по Лекции 6

1. Вывести формулу (11).
2. Получить выражение (17) для апостериорной вероятности $P(\mathbf{a}|\mathbf{g})$.

4 Вопросы по Лекции 6

1. Разложение ВФ по функциям отклика корректора, метод наименьших квадратов.
2. Восстановление ВФ с учетом статистики фазовых искажений, байесовский подход.

Список литературы

1. J. Hermann, J. Opt. Soc. Am. **70**, p.28 (1980).
2. http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html
3. Wallner E. P., J. Opt. Soc. Am. **73**, p.1771 (1983).
4. Bakut P. A., Kirakosyants V. E., Loginov V. A., Solomon C. J., Dainty J.C., Opt. Commun., **109**, p.10 (1994).