Лекция 5
Измерение искажений ВФ в адаптивной оптике II

Содержание

1 Гартмановские датчики ВФ

1.1 Устройство

Хорошо известный тест Гартмана, первоначально разработанный для испытания оптики телескопов: линза (или само тестируемое зеркало)+ непрозрачная маска с отверстиями. Модификация — датчик Шака-Гартмана (рис.1): Изображение выходного зрачка проектируется на двумерную решетку из одинаковых линз (линзовый растр). Каждая линза занимает малую часть апертуры, называемую субзрачком (субапертурой), и строит изображение источника. Все изображения строятся на одном детекторе, обычно на ПЗС (CCD).

Когда входящий волновой фронт плоский ("опорный"входной пучок), все изображения расположены в правильном порядке, определяемом геометрией линзового растра. Когда волновой фронт искажается, изображения смещаются от своих "нулевых"положений. Смещение центроида изображения в двух перпендикулярных направлениях x, y пропорциональны средним наклонам волнового фронта $\{\alpha_x, \alpha_y\}$ в субапертурах. $\rightarrow$ ДВФ Шака-Гартмана измеряет наклоны волнового фронта.

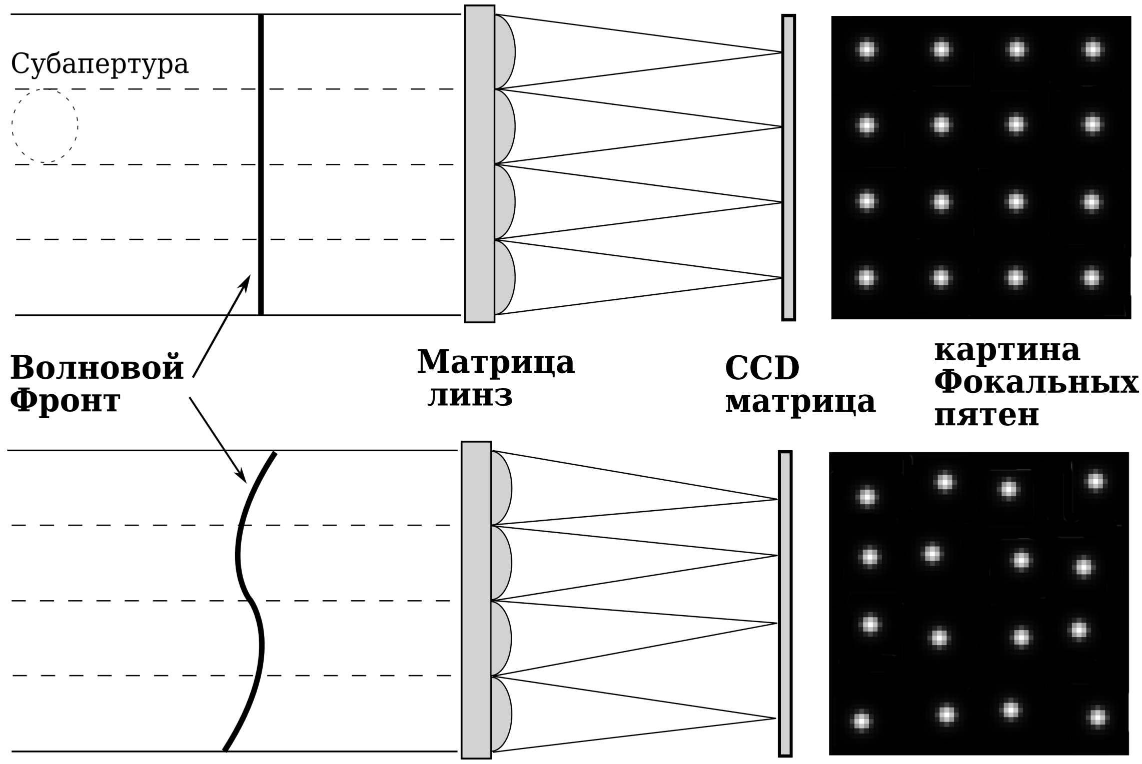

Рис. 1: Схема гартмановского ДВФ

Сам волновой фронт восстанавливается по массиву измеренных наклонов, с точностью до постоянной, которая не играет роли при построении изображения. Разрешение ДВФ Шака-Гартмана равно размеру субапертуры.

Пусть имеется N субапертур, пронумерованных от 1 до N, и координаты опорных точек (центров опорных пятен): $\{x_{01}, x_{02} \dots x_{0N}\}$ и $\{y_{01}, y_{02} \dots y_{0N}\}$. Для ВФ с аберрациями $W(x, y)$ получим набор координат центров пятен: $\{x_1, x_2 \dots x_N\}$ and $\{y_1, y_2 \dots y_N\}$. Тогда наклоны ВФ вычисляются след.образом:

$$\alpha_i = \frac{x_i - x_{0i}}{f}, \quad \beta_i = \frac{y_i - y_{0i}}{f}, \quad i = 1 \dots N \tag{1}$$

где f– фокусное расстояние линз растра. В идеале измеренные наклоны (1) являются оценками градиентов ВФ в центре субапертур:

$$\nabla W(x_{0i}, y_{0i}) = \mathbf{i}\frac{\partial W}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathbf{i}\alpha_i + \mathbf{j}\beta_i\right) \tag{2}$$

где λ — длина волны входного излучения. Профиль ВФ восстанавливается численно из массива измеренных наклонов.

1.2 Вычисление координат центра фокального пятна

Координаты центров фокальных пятен определяются алгоритмами, наиболее распространенным является "центр масс". В соответствии с ним координаты центра пятна номер i вычисляются по формулам:

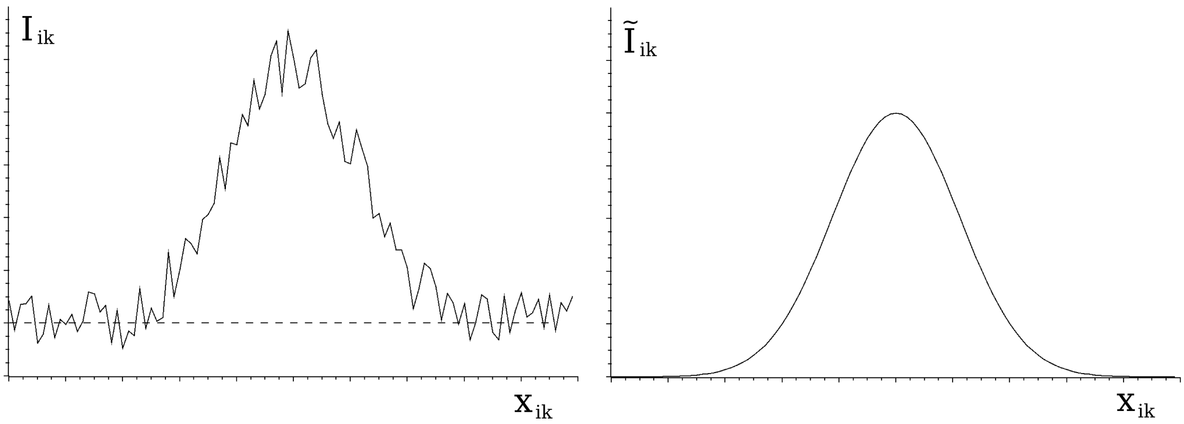

Рис. 2: Пример обработки распределения интенсивности фокального пятна: сглаживание и вычитание шумового пьедестала

$$x_i = \frac{\sum\limits_{x_{ik} \in A_i} x_{ik} \tilde{I}_{ik}}{\sum\limits_{x_{ik} \in A_i} \tilde{I}_{ik}}, \quad y_i = \frac{\sum\limits_{y_{ik} \in A_i} y_{ik} \tilde{I}_{ik}}{\sum\limits_{y_{ik} \in A_i} \tilde{I}_{ik}}, \tag{3}$$

где $\tilde{I}_{ik}$ — *модифицированное* распределение интенсивности в A_i, полученное от линзы растра с номером i.

Алгоритмы предварительной обработки распределения интенсивности (т.е. получения модифицированного распределения $\tilde{I}_{ik}$ из исходного I_{ik}) зависят от условий измерений. Как правило, используется сглаживание и вычитание шумового пьедестала (см Рис.2).

2 Датчики кривизны ВФ

Метод измерения кривизны ВФ [1, 2] разрабатывался Ф.Роддиером с 1988 г. Его идея состояла в непосредственном соединении биморфного зеркала с датчиком кривизны (ДК), при котором отпадет необходимость в промежуточных вычислениях (хотя это так и не было осуществлено).

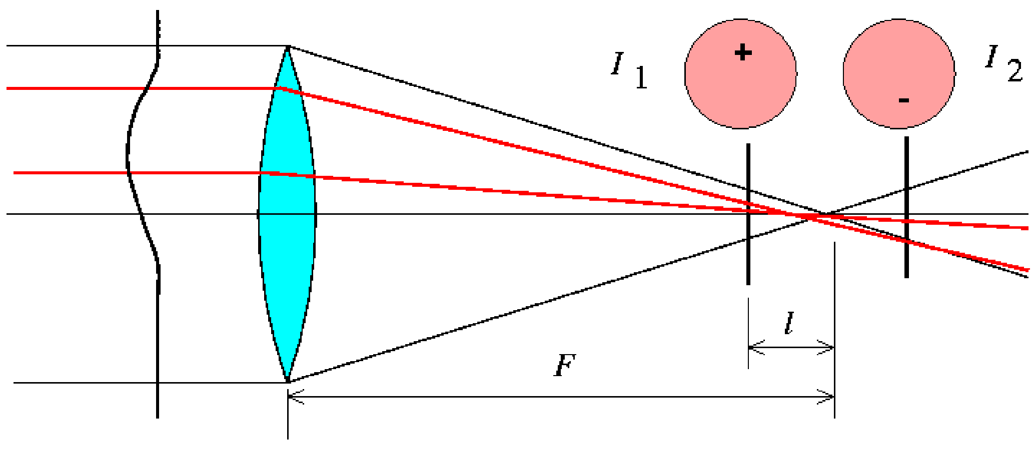

Рис. 3: Схема датчика кривизны ВФ

Пусть $I_1(\vec{r})$ - распределение интенсивности света в предфокальном изображении звезды, расфокусированном на некоторое расстояние l, а $I_2(\vec{r})$ - соответствующее распределение интенсивности в зафокальном изображении. Здесь $\vec{r}$ - координата в плоскости изображения и F - фокусное расстояние телескопа. Два этих изображения - как бы изображения зрачка, уменьшенные с фактором $\frac{l}{F-l}$. В приближении геометрической оптики местные искривления ВФ делают одно изображение ярче, а другое слабее; нормализованную разницу интенсивностей можно записать как

$$\frac{I_1(\vec{r}) - I_2(\vec{r})}{I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r})} = \frac{\lambda F(F-l)}{2\pi l}\left[\frac{\partial}{\partial n}\phi\left(\frac{F\vec{r}}{l}\right)\delta_c - \nabla^2\phi\left(\frac{F\vec{r}}{l}\right)\right]. \tag{4}$$

Лапласиан $\bigtriangledown^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ используется для вычисления кривизны распределения фазы $\phi(\vec{x})$. Первый член в этом уравнении — это градиент фазы на краю апертуры (символически это записывается как частная производная по направлению, перпендикулярному краю, умноженная на "краевую функцию"δ_c). ДК ахроматичен (вспомним, что $\phi(\vec{x})$ обратно пропорционально λ). Хотя формула (4) выглядит сложной, ее смысл ясен. Важным является то, что чувствительность ДК обратно пропорциональна расфокусировке l.

Для источника с конечным угловым размером β пред- и зафокальные изображения размыты на величину $\beta(F-l)$. Размытие должно быть меньше проекции размера субапертуры d:

$$\beta(F-l) < \frac{l}{F}d \tag{5}$$

Расфокусировка всегда намного меньше фокусного расстояния F, следовательно, условие минимальной расфокусировки имеет вид:

$$l > \beta\frac{f^2}{d}. \tag{6}$$

Выбор расфокусировки l весьма критичен для ДК, его необходимо подстраивать при изменении качества изображения. Сигнал ДК - это только более или менее грубое приближение действительной кривизны ВФ.

Приведем без вывода формулу для дисперсии фазы из-за фотонного шума в ДК, когда расфокусировка подстроена до оптимального значения:

$$\langle\epsilon^2_{\rm phot}\rangle = \frac{\pi^2}{n}\left(\frac{\beta d}{\lambda}\right)^2. \tag{7}$$

Как и для гартмановского ДВФ (ГДВФ), это дисперсия для одной субапертуры. Выражения для ГДВФ и ДК очень похожи. Чтобы получить полную ошибку волнового фронта, $\langle\epsilon^2_{\rm phot}\rangle$ нужно умножить на коэффициент распространения шума, который для ДК пропорционален количеству субапертур N (он пропорционален логарифму N для ГДВФ). При реконструкции волнового фронта низкие частоты усиливаются, поэтому шум в основном смещается к модам с низким порядком. Это указывает на потенциальную проблему при использовании ДК в системах адаптивной оптики высокого порядка. Подробное компьютерное моделирование системы АО Джемини (200 актуаторов) показало, что эффективность ГДВФ и ДК почти одинакова (Applied Optics, V. 36, P. 2856, 1997).

3 Восстановление ВФ по измерениям локальных наклонов

3.1 Основные предположения

Фаза должна изменяться достаточно плавно [3, 4, 5]. Пусть комплексная амплитуда световой волны:

$$A(\mathbf{r}) = exp[\chi(\mathbf{r}) + j\varphi(\mathbf{r})] \tag{8}$$

где $\chi(\mathbf{r})$ – логарифм вещественной амплитуды, $\varphi(\mathbf{r})$ – фаза. Считаем, что внутри системы, где расположен ДВФ, среда однородна, и справедливо параболическое уравнение:

$$2jk\frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A \tag{9}$$

Подставляем (8) в (9) и разделяем уравнения для действительной и мнимой частей:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\nabla\varphi)^2 & = & \nabla^2\varphi + (\nabla\chi)^2 + 2k\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \nabla^2\varphi + \nabla\varphi\nabla\chi & = & 2k\frac{\partial\chi}{\partial z} \end{array} \right. \tag{10}$$

Из (10): поперечный градиент фазы и изменение градиента существенным образом зависят от градиента логарифма амплитуды $\nabla\chi$.

Дислокации ВФ. Восстановление ВФ (при отсутствии дислокаций) по измеренным локальным наклонам. Неоднозначность восстановления фазы при наличии флуктуаций (рис.4).

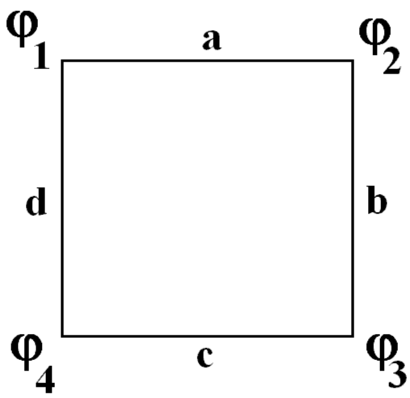

Рис. 4:

3.2 Метод наименьших квадратов (МНК). Непрерывные измерения

При точных измерениях фазы во всех точках апертуры:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_c \nabla\varphi dl + \varphi(\mathbf{r}_0) \tag{11}$$

где c – любая кривая, соединяющая точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$.

При измерениях с погрешностью:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla\varphi + \mathbf{n}(\mathbf{r}) \tag{12}$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ – истинное распределение фазы, $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ – измеренный градиент, $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ – шум измерения.

Будем считать наилучшей оценкой $\tilde{\varphi}$ фазы φ

$$\int(\tilde{\varphi} - \mathbf{g})^2 d^2\mathbf{r} \to \min. \tag{13}$$

Получили вариационную задачу. Уравнение Эйлера для наилучшей оценки фазы (задание для студентов):

$$\nabla^2\tilde{\varphi} = \mathrm{div}(\mathbf{g}). \tag{14}$$

Физический смысл уравнения Пуассона (14): Вектор $\mathbf{g}$, содержащий шум, не является градиентом какой-либо потенциальной функции, и может быть представлен как сумма потенциальной и вихревой составляющих. Вихревая часть создается шумом и должна быть отброшена – это осуществляется применением оператора дивергенции. Шум искажает также и потенциальную составляющую, МНК никак не влияет на эту погрешность.

3.3 МНК. Дискретные измерения

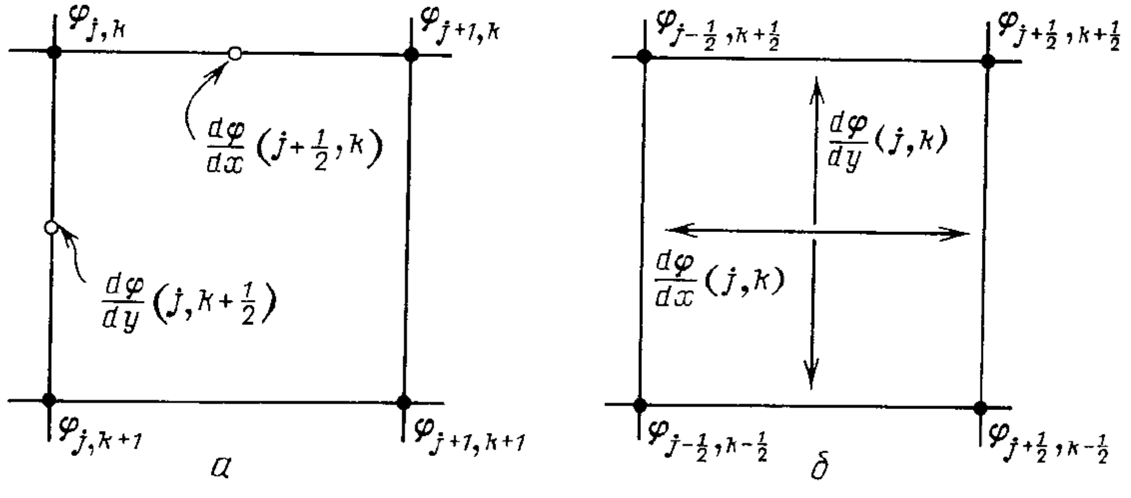

Рис. 5: Аппроксимация градиентов через неизвестные значения фазы в схемах Хаджина (а) и Фрида (б).

Аппроксимация градиентов через неизвестные значения фазы в схеме Хаджина ([6] — рис.5а) – использовалась для интерферометра поперечного сдвига:

$$\frac{\varphi_{j+1,k} - \varphi_{jk}}{h} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(j+\frac{1}{2},k), \qquad \frac{\varphi_{j,k+1} - \varphi_{jk}}{h} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(j,k+\frac{1}{2}). \tag{15}$$

Приравняв разностный оператор в левой части измеренным значениям g_x и g_y, составим для сетки $N \times N$ узлов систему из $2N(N-1)$ уравнений, содержащую N^2 неизвестных. Для $N > 2$ число уравнений превышает число неизвестных φ_{jk}.

Аппроксимация градиентов через неизвестные значения фазы в схеме Фрида ([7] — рис.5б) — использовалась для гартмановского датчика:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(j,k) &= \left[\frac{\varphi_{(j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}+\varphi_{(j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{2h} - \frac{\varphi_{(j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}+\varphi_{(j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{2h}\right], \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(j,k) &= \left[\frac{\varphi_{(j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}+\varphi_{(j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}}{2h} - \frac{\varphi_{(j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}+\varphi_{(j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{2h}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Приравняв разностный оператор в правых частях измеренным значениям g_x и g_y, в этом случае получим $2(N-1)^2$ уравнений для N^2 неизвестных. Выход: использовать МНК.

Матричная форма уравнений для фаз:

$$\mathbb{A}\vec{\varphi} = \mathbf{g} \tag{17}$$

где $\vec{\varphi}$ — вектор-столбец, составленный из N неизвестных значений фазы, $\mathbf{g}$ — из M результатов измерений.

Решение системы (17) также м.б. представлено в матричном виде:

$$\vec{\varphi} = \mathbb{Q}\mathbf{g} \tag{18}$$

Тогда восстановление ВФ — нахождение матрицы $\mathbb{Q}$.

МНК: составляем сумму квадратов невязок

$$\mathbf{J^2} = \sum_{k=1}^{M} (\tilde{g}_k - g_k)^2 \to \min, \tag{19}$$

где g_k — измеренные значения градиентов, g_k — вычисленные через неизвестные значения фазы по формулам (15,16).

Компактная запись:

$$\mathbf{J^2} = |\mathbb{A}\vec{\varphi} - \mathbf{g}|^2 = |\mathbb{A}\vec{\varphi} - \mathbf{g}|^T \, |\mathbb{A}\vec{\varphi} - \mathbf{g}| \,. \tag{20}$$

Продифференцировав J^2 по переменным φ_k , получим:

$$\mathbb{A}^T\mathbb{A}\vec{\varphi} = \mathbb{A}^T\mathbf{g} \tag{21}$$

В этой системе число уравнений равно числу неизвестных. Однако уравнения системы линейно зависимы: любая разностная схема определяет искомые значения фазы с точностью до произвольной постоянной, которая никак не влияет на значения градиентов. Выход: заменить одно (любое) из уравнений системы (21) на "внешнее"уравнение, выражающее некоторое физическое условие. Например:

- Объявить нулем фазу произвольного узла (недостатки);
- Потребовать равенства нулю средней фазы $\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k = 0$;
- Минимизировать норму вектора $\vec{\varphi}$: $\vec{\varphi}^T\vec{\varphi} \to min.$

Последнее условие обеспечивает однозначность решения также и в том случае, если особенности схемы дискретизации приводят к появлению более чем одной произвольной постоянной.

4 Задания по Лекции 5

1. Вывести формулу (14).

2. Видоизменить формулы (17-21) так, чтобы можно было учесть статистический «вес» различных узлов измерения градиентов: (в каких-то узлах градиенты могут измеряться точнее, чем в других).

5 Вопросы по Лекции 5

1. Гартмановский ДВФ. Устройство, принцип работы, позиционная характеристика, чувствительность измерений.

2. Общие принципы восстановления ВФ по измерениям локальных наклонов, случай непрерывных (по пространству) измерений. Влияние шумов измерений.

3. Восстановления ВФ по измерениям локальных наклонов в случае дискретных измерений. Однозначность восстановления ВФ. Схемы Фрида и Хаджина.

4. Восстановления ВФ методом наименьших квадратов.

Список литературы

1. А.В. Токовинин. Учебное пособие по адаптивной оптике обсерватории Серро Тололо, `http://www.astronet.ru/db/msg/1205112/intro.html`

2. Roddier F., Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics, Appl. Opt., **27**, 7, 1223–1225, (1988).

3. Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985, 288 с.

4. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В. И. Управляемые оптические системы, М.: Наука, 1988, 272 с.

5. Корябин А.В., В. И. Шмальгаузен В.И. Методы регистрации волнового фронта в адаптивных системах, Сб. "Управление пространственной структурой оптического излучения Т.2.: "Волновой фронт оптического излучения: управление и регистрация М.:ВИНИТИ, 1991. - с.56-89.

6. Hudgin R. H., Wave-front reconstruction for compensated imaging, Journal of the Optical Society of America, **67**, 375 - 378 (1977).

7. Fried D. L., Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phased- ifference measurements, Journal of the Optical Society of America, **67**, 370 - 375 (1977).