Лекция 10
Эффективность адаптивной фазовой коррекции

Содержание

1 Общая схема адаптивной системы с датчиком волнового фронта

1.1 Источники погрешностей

Пусть

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t)\psi_i(\mathbf{r})+\varepsilon_N(\mathbf{r}) \tag{1}$$

— разложение входной фазы по функциям отклика корректора (их N штук), ε_N — остаточная ошибка, неразложимая по $\psi_i(\mathbf{r})$.

Вносимая коррекция:

$$u(\mathbf{r},t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(t)\psi_i(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Остаточная ошибка:

$$\varepsilon(\mathbf{r},t)=\sum_{i=1}^{N}c_i(t)\psi_i(\mathbf{r})+\varepsilon_N(\mathbf{r},t), \tag{3}$$

где $c_i=a_i-u_i$; эти коэффициенты измеряются ДВФ с некоторой ошибкой δ_i.

Таким образом, наблюдению доступны величины $\tilde{c}_i=c_i+\delta_i$, и через них надо выразить сигналы управления u_i, подаваемые на корректор (δ_i — случайные величины).

1.2 Простейший контур управления

Рассмотрим простейший случай устройства управления — в каждом канале усилитель с коэффициентом K_i; каналы независимы.

$$u_i=K_i(c_i+\delta_i). \tag{4}$$

с учетом (1) и (2) найдем значения c_i :

$$c_i=a_i\frac{1}{1+K_i}-\frac{K_i}{1+K_i}\delta_i. \tag{5}$$

Из выражения (3) для остаточной ошибки следует ф-ла для усредненной по апертуре остаточной квадратичной ошибки:

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\sum_{i=1}^{N}\langle c_i^2\rangle+\langle\varepsilon_N^2\rangle. \tag{6}$$

Последнее слагаемое в (6) — ошибка, связанная с конечным числом N степеней свободы корректора — не исчезает даже при идеальной работе всех элементов системы. Каждый член суммы (если $\langle a_i\delta_i\rangle=0$)

$$\langle c_i^2\rangle=\langle a_i^2\rangle\left(\frac{1}{1+K_i}\right)^2+\left(\frac{K_i}{1+K_i}\right)^2\langle\delta_i^2\rangle \tag{7}$$

состоит из ошибки коррекции аберрации и ошибки измерения ВФ. Поскольку $K_i>>1$, последний член в (7) приближенно равен $\langle\delta_i^2\rangle=\sigma_i^2$.

1.3 Структура остаточной ошибки коррекции

Из рассмотренного примера следует типичная структура остаточной ошибки коррекции в адаптивной системе:

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i\alpha_{ii}+\sigma_i^2\right)+\langle\varepsilon_N^2\rangle. \tag{8}$$

где β_i — коэффициенты передачи системой входных искажений ВФ, (в нашем примере $\beta_i=\left(\frac{1}{1+K_i}\right)^2$), $\alpha_{ii}=\langle a_i^2\rangle$ (см. Лекцию 7), σ_i^2 — квадрат ошибки измерения i-ой моды ВФ,

$$\langle\varepsilon_N^2\rangle=\sum_{i=N+1}^{\infty}\alpha_{ii}$$

— ошибка, связанная с конечным числом N степеней свободы корректора.

2 Идеальный модальный корректор и его эффективность

2.1 Идеальный корректор Цернике

В теории удобно рассматривать идеальный модальный корректор – устройство, точно воспроизводящее N первых функций Цернике. Пусть система работает без ошибок, т.е. $\beta_i = 0$, $\sigma_i^2 = 0$. Тогда при компенсации искажений с Колмогоровской статистикой

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \varepsilon_N^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_{ii} = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sum_{i=N+1}^{\infty} \gamma_{ii} \tag{9}$$

(γ_{ii} — известные коэффициенты). Формула (9) соответствует потенциальной эффективности адаптивной системы при точной коррекции N первых функций Цернике. Значения ε_N^2 приведены в таблице в единицах $(D/r_0)^{5/3}$.

N	**Скорректированные моды**	$\varepsilon_{\mathbf{N}}^{\mathbf{2}} \cdot (D/r_0)^{-5/3}$
0	без коррекции	1.03
1	1 наклон	0.58
2	2 наклона (1-*ый* порядок)	0.136
3	2 наклона + сфера	0.113
5	2 наклона + 2-*ой* порядок	0.0657
9	2 наклона + 2-*ой* порядок + 3-*ий* порядок	0.0467
14	2 наклона + 2-*ой* порядок + 3-*ий* порядок + 4-*ый* порядок	0.0283

Распределение ошибки коррекции по апертуре дается формулой

$$\delta_N^2(\mathbf{r}) = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sum_{i,k=N+1}^{\infty} \gamma_{ik} \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) \tag{10}$$

Функции $\delta_N(\mathbf{r})$ приведены на рис.1 (см. [1] стр.293).

2.2 Алгоритм оценки остаточной ошибки

В реальной системе даже с идеальным корректором ошибка будет больше. Алгоритм оценки остаточной ошибки: зная устройство системы, находим β_i и σ_i^2 для каждой моды; далее можно использовать (8). Заметим, что добавление лишней степени свободы добавляет в сумму слагаемое $\beta_i \alpha_{ii} + \sigma_i^2$ вместо исходного значения α_{ii}. В зависимости от значений β_i и σ_i^2 выигрыш может быть (для больших i) невелик или вообще отсутствовать, значит усложнять систему в такой ситуации бесполезно.

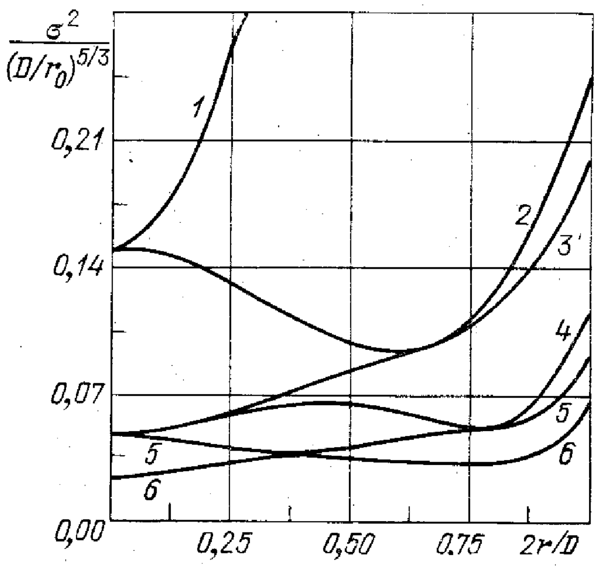

Рис. 1: Распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу: 1 — коррекциия средней фазы; 2 — коррекция средней фазы и наклонов; то же плюс коррекция дефокусировки; коррекция низших аберраций, включая астигматизм (4), кому (5), сферическую аберрацию.

3 Влияние анизопланатизма

3.1 Наблюдение 2-х объектов

При наблюдении одновременно двух объектов, разнесенных под углом θ, при идеальной коррекции N мод 1-го объекта он будет наблюдаться с ошибкой ε_N^2, а второй – (см. Лекцию 9) с ошибкой

$$\varepsilon_{2,N}^2 = \varepsilon_N^2 + 2\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ii}\left(1 - K_i(\theta)\right) \tag{11}$$

При больших углах θ, когда $K_i(\theta) < 1/2$, добавление числа мод будет уменьшать ошибку для первого объекта и увеличивать для второго.

3.2 Взвешенная коррекция

Ошибку волнового фронта для второго объекта можно уменьшить, применив «взвешенную коррекцию». В этом случае коррекция кождой моды производится с весом: $U_i = \mu a_i^{(1)}$, а вес подбирается так, чтобы минимизировать ошибку. В условиях предыдущей задачи оптимальное значение $\mu_{opt} = K_i(\theta)$. Для такой коррекции

$$\tilde{\varepsilon}_{2,N}^2 = \varepsilon_N^2 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ii}\left(1 - K_i^2(\theta)\right) \tag{12}$$

В этом случае ошибка никогда не превысит ошибку без коррекции.

Можно модифицировать алгоритм коррекции так, чтобы оба объекта были равноправны. Предположим, что волновые фронты обоих источников доступны для измерения. Положим

$$u_i = \frac{1}{2}\left(a_i^{(1)} + a_i^{(2)}\right). \qquad (13)$$

При такой коррекции для каждого объекта получим:

$$\left\langle \varepsilon_{2,N}^2 \right\rangle = \varepsilon_N^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ii}\left[1 - K_i(\theta)\right]. \qquad (14)$$

Заметим, что в этом случае изображение каждого объекта не хуже, чем без коррекции, т.к.

$$\left[1 - K_i(\theta)\right] < 1, \qquad (15)$$

в то время как при полной коррекции изображения первого объекта изображение второго могло ухудшиться за счет тех слагаемых в (11) где $K_i(\theta) < 1/2$. При наличии большого числа объектов или опорных источников задача сильно усложняется.

4 Задания по Лекции 10

1. —

2. —

5 Вопросы по Лекции 10

1. —

Список литературы

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985, 288 с.

2. А.В. Токовинин. Учебное пособие по адаптивной оптике обсерватории Серро Тололо, `http://www.astronet.ru/db/msg/1205112/intro.html`