Лекция 11. Измерение искажений ВФ в адаптивной оптике III

1. **Разложение фазы по функциям откликам корректора**.
2. **Восстановление ВФ с учетом статистики фазовых искажений, байесовский подход**.

1. **Разложение фазы по функциям откликам корректора**.

1.1. Равнозначные субапертуры.

В АО системах с модальными корректорами волнового фронта необходимо определять не сам профиль корректируемого пучка, а коэффициенты его разложения по функциям отклика управляемого зеркала. Фазу светового пучка в этом случае удобно представлять в виде:

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\, S_j(\boldsymbol{r}), \tag{1.1}$$

где $S_j(r)$ — функции отклика корректора на единичное управляющее воздействие, $a_j(t)$ — коэффициенты разложения. Аналогичное выражение описывает и форму поверхности корректора; поэтому коэффициенты $a_j(t)$ можно непосредственно использовать для управления зеркалом по соответствующим степеням свободы.

<u>Цель</u>: необходимо по измеренным в заданных точках локальным наклонам волнового фронта (т. е. по градиентам фазы) определить с минимально возможными погрешностями вектор $\boldsymbol{a} = \{ a_j(t) \}$ коэффициентов разложения (1.1).

Векторная форма. Пусть датчик измеряет градиенты фазы в точках r_m, $m = 1,.., M$. Введем вектор оценок градиентов $\hat{\boldsymbol{g}}$, элементами которого являются частные производные фазы:

$$\widehat{\boldsymbol{g}} = \{\varphi_x(\boldsymbol{r}_1), \ \ldots, \ \varphi_x(\boldsymbol{r}_M), \ \varphi_y(\boldsymbol{r}_1), \ \ldots, \ \varphi_y(\boldsymbol{r}_M)\}. \tag{1.2}$$

Для вектора $\hat{\boldsymbol{g}}$ из разложения (1.1) следует

$$\widehat{\boldsymbol{g}} = \mathbf{P}\boldsymbol{a}, \tag{1.3}$$

где элементы матрицы $\boldsymbol{P} = \{p_{mj}\}$ определяются через производные функций $S_j(r_m)$:

$$p_{mj} = \frac{\partial S_j}{\partial x}\bigg|_{r=r_m}, \quad p_{m+M,j} = \frac{\partial S_j}{\partial y}\bigg|_{r=r_m}, \qquad m = 1, \ \ldots, M, \ j = 1, \ \ldots, N. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\boldsymbol{g}$ вектор градиентов фазы, измеряемых датчиком волнового фронта в точках $\{r_m\}$: $\boldsymbol{g}_1,.. \boldsymbol{g}_M$ – производные по x; $\boldsymbol{g}_{M+1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{2M}$ — производные по y. Сумму квадратов невязок между градиентами, вычисленными по формулам (1.3), и измеренными значениями выразим в векторном виде:

$$J^2 = (\widehat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g})^{\mathrm{T}} (\widehat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}), \tag{1.5}$$

где $(\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g})$ — вектор невязок. Используя (1.3), для $\boldsymbol{P}$ получаем матричное выражение

$$J^2 = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{a}. \tag{1.6}$$

Для определения вектора $\boldsymbol{a_0}$, при котором квадратичная форма J^2 достигает минимума, необходимо приравнять к нулю ее частные производные по переменным a_j. Таким образом, из (1.6) получаем

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}. \tag{1.7}$$

Эта система содержит N уравнений для N неизвестных и может быть решена известными методами линейной алгебры. Отметим, что для ее решения нет необходимости привлекать дополнительные условия типа (см. Лекцию 10). Искомый вектор $\boldsymbol{a_0}$ прямо выражается через вектор измеренных градиентов с помощью обратной матрицы:

$$\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{Q}\boldsymbol{g}, \quad \mathbf{Q} = \left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}. \qquad (1.8)$$

Матрица $\boldsymbol{Q}$ не зависит от измеряемых величин и может быть вычислена до проведения измерений.

1.2. *Неравнозначные субапертуры.*

Иногда целесообразно использовать более общую форму для суммы квадратов невязок $\boldsymbol{J}^2$, чем та, которая определяется соотношением (1.5). Информация о локальных наклонах с различных субапертур датчика обладает разной достоверностью. Это может быть, например, связано с тем, что субапертуры датчика располагаются в узлах квадратной сетки, в то время как у подавляющего числа оптических систем сечение пучка имеет круглую или кольцевую форму. При этом элементы датчика, расположенные на краях апертуры, обычно частично затемнены; поэтому относительный уровень погрешностей измерений на таких субапертурах выше, чем на внутренних. Для учета степени достоверности измерений на разных субапертурах компонентам $\{\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}\}_j$ вектора невязок удобно приписать различные статистические веса. С учетом этого выражение (1.5) запишется в виде

$$J^2 = (\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g})^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\,(\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}). \qquad (1.9)$$

В простейшем случае положительно определенная матрица W может быть диагональной. При этом вместо (1.7) получим

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{P}\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\boldsymbol{g}. \qquad (1.10)$$

Вектор $\boldsymbol{a_0}$ будет определяться выражением, аналогичным (1.8):

$$\boldsymbol{a}_0 = \left[\left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\right]\boldsymbol{g}. \qquad (1.11)$$

<u>Обусловленность системы.</u> Коэффициенты при неизвестных a_j в (1.7) и (1.10) зависят от вида функций отклика корректора $S_j(r)$ и выбора точек $\{r_m\}$ измерения градиента. При некотором выборе этих параметров система (1.7) или (1.10) м.б. плохо обусловленной и ее определитель будет близок к нулю. В таком случае улучшить ситуацию можно, например, изменив расположение точек измерения градиентов.

2. **Восстановление ВФ с учетом статистики фазовых искажений, байесовский подход**.

2.1. Основные положения.

<u>Проблема</u>. Фазовые флуктуации имеют известную статистику, как учесть ее при восстановлении ВФ или вычислении коэффициентов a_j в (1.1)?

Статистика фазовых искажений – гауссова (почему?).

Напомним, если $\{a_j\}$ – гауссовы и $\langle a_j \rangle = 0$, $\langle a_j a_i \rangle = C_{ji}$, где $\boldsymbol{C}$ – ковариационная матрица, то плотность вероятности распределения:

$$P(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}\} \qquad (2.1)$$

<u>Байесовский подход</u>. Имеется случайный вектор $\boldsymbol{a}$, а измеряем мы вектор $\hat{\boldsymbol{g}}$ (как в 1.1 – 1.3). Совместная вероятность:

$$P(\mathbf{a},\hat{\mathbf{g}}) = P(\mathbf{a}\,|\,\hat{\mathbf{g}})P(\hat{\mathbf{g}}) = P(\hat{\mathbf{g}}\,|\,\mathbf{a})P(\mathbf{a}) \qquad (2.2)$$

здесь $P(\boldsymbol{a}|\,\hat{\boldsymbol{g}})$ и $P(\hat{\boldsymbol{g}})$ – апостериорные вероятности, $P(\boldsymbol{a})$ – априорная вероятность, $P(\hat{\boldsymbol{g}}|\boldsymbol{a})$– функция правдоподобия.

<u>«Трюк» 1</u>. Вектор $\hat{\boldsymbol{g}}$ уже измерен, и для данных конкретных измерений $P(\hat{\boldsymbol{g}})=1$, тогда:

$$P(\mathbf{a}\,|\,\hat{\mathbf{g}}) = P(\hat{\mathbf{g}}\,|\,\mathbf{a})P(\mathbf{a}) \qquad (2.3)$$

– апостериорная вероятность получить вектор $\boldsymbol{a}$, если измерения дали вектор $\hat{\boldsymbol{g}}$.

<u>«Трюк» 2</u>. Сопоставим вектору ***a*** некоторый «идеальный» вектор измерений ***g=Pa***, где ***P***– матрица преобразования. Теперь можно сказать:

$$P(\mathbf{a} \mid \widehat{\mathbf{g}}) = P(\mathbf{g} \mid \widehat{\mathbf{g}}) \tag{2.4}$$

Связь между $\hat{\boldsymbol{g}}$ и $\boldsymbol{g}$:

$$\widehat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \mathbf{n};$$

$$\langle n_i \rangle = 0; \quad \langle n_i n_j \rangle = \delta_{ij} \sigma_i^{\,2}; \tag{2.5}$$

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_M}} \exp\{-\frac{1}{2} \mathbf{n}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{n}\}$$

Где $\boldsymbol{n}$ – вектор шумов измерений, $\boldsymbol{\Sigma}$ – ковариационная матрица флуктуаций. Так как $\boldsymbol{n}=\hat{\boldsymbol{g}}-\boldsymbol{g}$, то $P(\boldsymbol{n}) = P(\hat{\boldsymbol{g}}-\boldsymbol{g})$ – функция правдоподобия (2.4), тогда из (2.5) и (2.1) получим выражение для апостериорной вероятности $P(\boldsymbol{a}|\, \hat{\boldsymbol{g}})$. (Для студентов).

Имея выражение для плотности распределения апостериорной вероятности $P(\boldsymbol{a}|\hat{\boldsymbol{g}})$, можно получить оценку для вектора ***a***, например: среднее значение распределения (или наиболее вероятное, или медианное значение и т.р.).

<u>Применимость</u>: использование априорной информации оправдано, когда либо измерения относительно редкие (мало субапертур), либо шумы измерений велики.

Задания по Лекции 11.

1. Вывести формулу (1.11).
2. Получить выражение для апостериорной вероятности $P(\boldsymbol{a}|\, \hat{\boldsymbol{g}})$.

Вопросы по Лекции 11.

1. Разложение ВФ по функциям отклика корректора, метод наименьших квадратов.
2. Восстановление ВФ с учетом статистики фазовых искажений, байесовский подход.