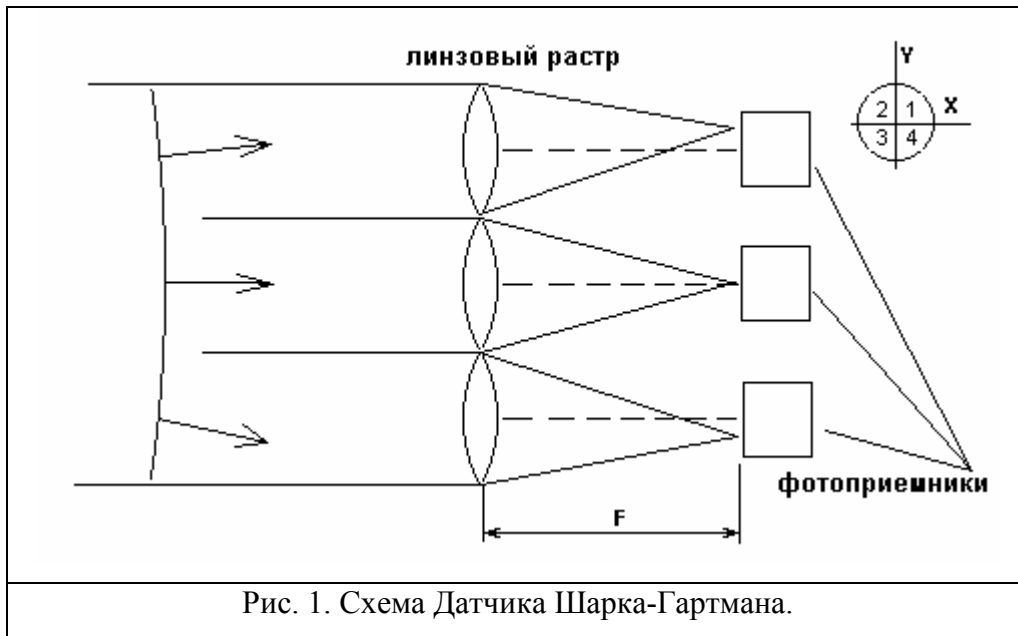


Лекция 10 Измерение искажений ВФ в адаптивной оптике II

1. Гартмановские ДВФ.
2. Восстановление ВФ по измерениям локальных наклонов.



1. Гартмановские ДВФ.

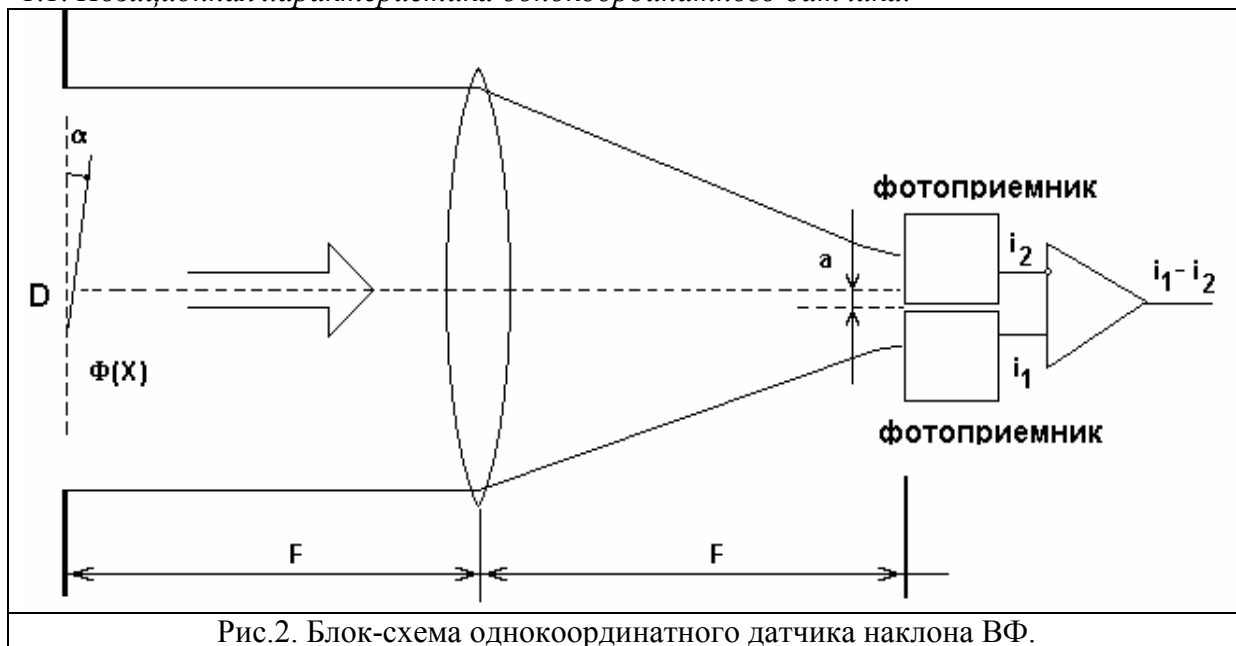
Измерив токи фотоприемников (рис.1) i_1, i_2, i_3 и i_4 , формируют сигналы:

$$g_x = [(i_1 + i_4) - (i_2 + i_3)] / (i_1 + i_2 + i_3 + i_4) \quad \text{и} \quad g_y = [(i_1 + i_4) - (i_2 + i_3)] / (i_1 + i_2 + i_3 + i_4) \quad (1.1)$$

зависимость g_x приближенно линейна при малой величине смещения фокального пятна $a \ll W$ (– полуширина фокального пятна). Если диаметр субапертуры D достаточно мал, и высшими aberrациями ВФ в пределах субапертуры можно пренебречь, то: $W \cong \lambda F / D$. Т.к. $a = \alpha_x F$ то область линейности датчика:

$$\alpha_x \leq \lambda / D \quad (1.2)$$

1.1. Позиционная характеристика однокоординатного датчика.



Распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы (Рис.2): $I_0 S j(x/W, y/W)$, где W – полуширина распределения, I_0 – интенсивность света, $S = \pi D^2/4$ – площадь апертуры датчика, функция распределения j удовлетворяет условию нормировки:

$$\iint j(x/W, y/W) dx dy = 1 \quad (1.3)$$

$$P_1 = SI_0 \int_0^\infty j\left(\frac{x-a}{W}\right) dx, \quad P_2 = SI_0 \int_{-\infty}^0 j\left(\frac{x-a}{W}\right) dx, \quad j(x/W) = \int_{-\infty}^\infty j(x/W, y/W) dy \quad (1.4)$$

Позиционная характеристика $g = (i_1 - i_2)/(i_1 + i_2)$, где $i_{1,2} = \chi P_{1,2} \Rightarrow$

$$g(a) = \int_0^\infty j\left(\frac{x-a}{W}\right) dx - \int_{-\infty}^0 j\left(\frac{x-a}{W}\right) dx. \quad (1.5)$$

$$\text{Если } j(x/W) \text{ – симметрично, то } g(a) = \int_{-a}^a j\left(\frac{x-a}{W}\right) dx \quad (1.6)$$

При $a \ll W \Rightarrow g(a) \cong 2a j(0) \approx 2a/W$, и для $a = \alpha F$:

$$\alpha = C \frac{W}{F} g(a) \approx \frac{\lambda}{D} \frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2} \quad (1.7)$$

где C зависит лишь от формы входной субапертуры и входного распределения интенсивности.

1.2. Чувствительность измерений.

$$i_1 = \langle i_1 \rangle + n_1, \quad i_2 = \langle i_2 \rangle + n_2, \quad \langle n_1 \rangle = 0, \quad \langle n_2 \rangle = 0, \quad \langle n_1 n_2 \rangle = 0, \quad \langle n_1^2 \rangle = \sigma_i^2, \quad \langle n_2^2 \rangle = \sigma_i^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_\alpha = C \left(\frac{\lambda}{D} \right) \frac{\sigma_{\Delta i}}{\langle i_1 + i_2 \rangle}, \quad (\langle i_1 + i_2 \rangle \text{ м.б. измерено с любой заданной точностью.}) \quad (1.8)$$

Введем отношение сигнал/шум:

$$Q = \frac{\langle i_1 + i_2 \rangle}{\sqrt{\langle [i_1 + i_2 - \langle i_1 + i_2 \rangle]^2 \rangle}} = \frac{\langle i_1 + i_2 \rangle}{\sigma_i \sqrt{2}}, \quad \text{т.к. } \sigma_{\Delta i} = \sigma_i \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_\alpha = C \left(\frac{\lambda}{D} \right) \frac{1}{Q} \quad (1.9)$$

2. Восстановление ВФ по измерениям локальных наклонов.

2.1. Основные предположения.

Фаза должна изменяться достаточно плавно. Правомерность представления фазы как плавно меняющейся функции. Комплексная амплитуда световой волны:

$$A(\mathbf{r}) = \exp[\chi(\mathbf{r}) + i\varphi(\mathbf{r})] \quad (2.1)$$

где χ – логарифм вещественной амплитуды. Считаем, что внутри системы, где расположен ДВФ, среда однородна и справедливо параболическое уравнение:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta A \quad (2.2)$$

Подставляем (2.1) в (2.2) и разделяем уравнения для действительной и мнимой частей:

$$(\nabla \varphi)^2 = \nabla^2 \varphi + (\nabla \chi)^2 + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \chi = 2k \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

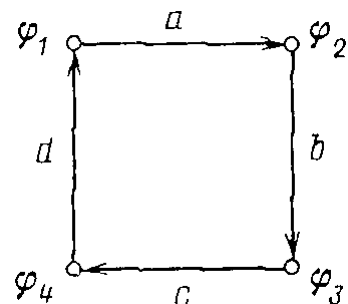
Из (2.3): поперечный градиент фазы и изменение градиента существенным образом зависят от градиента логарифма амплитуды $\nabla \chi$.

Дислокации ВФ.

Восстановление ВФ (при отсутствии дислокаций) по измеренным локальным наклонам.

Рис.3

Неоднозначность восстановления фазы при наличии



флуктуаций (рис.3).

2.2. Метод наименьших квадратов (МНК). Непрерывные измерения.

При точных измерениях фазы во всех точках апертуры:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_c \nabla\varphi dl + \varphi(\mathbf{r}_0), \quad (2.4)$$

где c – любая кривая, соединяющая точки r_0 и r .

При измерениях с погрешностью:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla\varphi + \mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

где $\varphi(r)$ – истинное распределение фазы, $g(r)$ – измеренный градиент, $n(r)$ – шум измерения. Будем считать наилучшей оценкой фазы

$$\int (\nabla\hat{\varphi} - \mathbf{g})^2 d^2r = \min. \quad (2.6)$$

Получили вариационную задачу. Уравнение Эйлера для наилучшей оценки фазы (задание для студентов):

$$\nabla^2\hat{\varphi} = \text{div } \mathbf{g}. \quad (2.7)$$

Физический смысл уравнения Пуассона (2.7): Вектор g , содержащий шум, не является градиентом какой-либо потенциальной функции, и может быть представлен как сумма потенциальной и вихревой составляющих. Вихревая часть создается шумом и должна быть отброшена – это осуществляется применением оператора дивергенции. Шум искажает также и потенциальную составляющую, МНК никак не влияет на эту погрешность.

2.3. МНК. Непрерывные измерения.

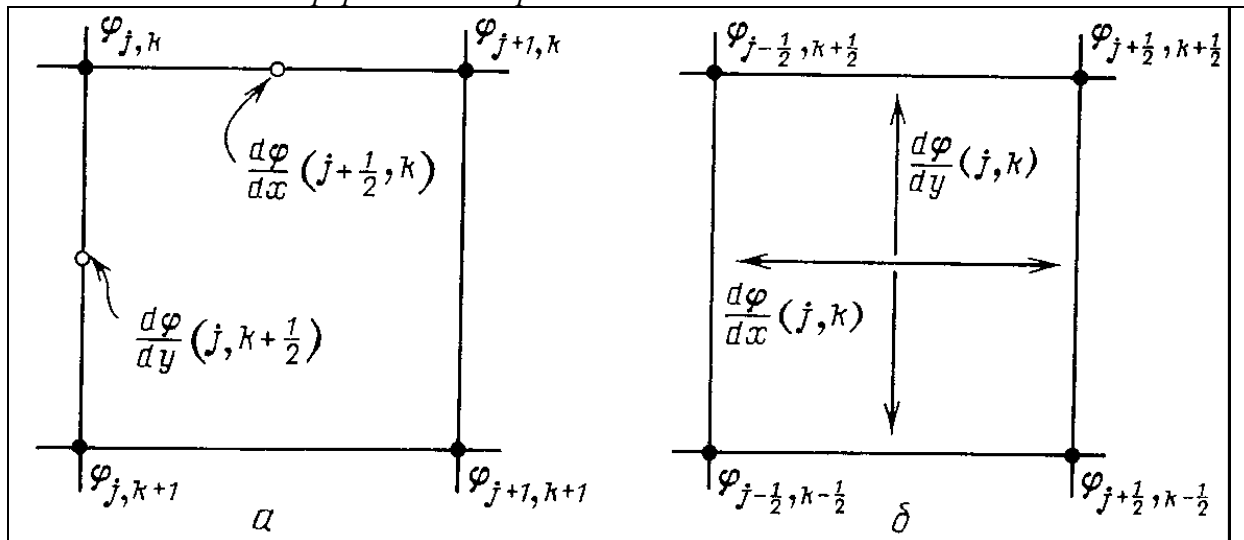


Рис.4. Аппроксимация градиентов через неизвестные значения фазы в схемах Хаджина (а) и Фрида (б).

Аппроксимация градиентов через неизвестные значения фазы в схеме Хаджина (рис.4а) – использовалась для интерферометра поперечного сдвига:

$$\frac{\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}}{h} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{j+1/2,k}, \quad \frac{\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}}{h} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{j,k+1/2} \quad (2.8)$$

Приравняв разностный оператор в левой части измеренным значениям g_x и g_y , составим для сетки $N \times N$ узлов систему из $2N(N-1)$ уравнений, содержащую N^2 неизвестных. Для $N > 2$ число уравнений превышает число неизвестных φ_{ik} .

Аппроксимация градиентов через неизвестные значения фазы в схеме Фрида (рис.4б) – использовалась для гартмановского датчика:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{j,k} &= \left[\frac{\varphi_{j+1/2,k+1/2} + \varphi_{j+1/2,k-1/2}}{2h} - \frac{\varphi_{j-1/2,k+1/2} + \varphi_{j-1/2,k-1/2}}{2h} \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{j,k} &= \left[\frac{\varphi_{j-1/2,k+1/2} + \varphi_{j+1/2,k+1/2}}{2h} - \frac{\varphi_{j+1/2,k-1/2} + \varphi_{j-1/2,k-1/2}}{2h} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Приравняв разностный оператор в правых частях измеренным значениям g_x и g_y , в этом случае получим $2(N-1)^2$ уравнений для N^2 неизвестных.

Матричная форма уравнений для фаз:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g}, \quad (2.10)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор-столбец, составленный из N неизвестных значений фазы, \mathbf{g} – из M результатов измерений.

Способ выражения производных. Обычно – простейшая аппроксимация первого порядка:

$$f' \approx (f_{n+1} - f_n)/h. \quad (2.11)$$

Любая разностная схема определяет искомые значения фазы с точностью до произвольной постоянной, которая никак не влияет на значения градиентов. Выход? 1) Объявить нулем фазу произвольного узла (недостатки). 2) Потребовать равенства нулю средней фазы или минимизировать норму вектора $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \varphi_i &= 0, \\ \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} &= \min, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\boldsymbol{\varphi}^T$ – транспонированный вектор (строка). Последнее условие обеспечивает однозначность решения также и в том случае, если особенности схемы дискретизации приводят к появлению более чем одной произвольной постоянной.

Решение системы (2.10) м.б. представлено в матричном виде:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}\mathbf{g}. \quad (2.13)$$

Тогда восстановление ВФ – нахождение матрицы \mathbf{Q} . МНК: составляем сумму квадратов невязок

$$J^2 = \sum_{j=1}^M (\hat{g}_j - g_j)^2, \quad (2.14)$$

где g_j – измеренные значения градиентов, \hat{g}_j – вычисленные через неизвестные значения фазы по формулам типа (2.11).

Компактная запись:

$$J^2 = |\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{g}|^2 = (\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{g})^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{g}). \quad (2.15)$$

Продифференцировав J^2 по переменным φ_i , получим:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{A}^T \mathbf{g} = 0. \quad (2.16)$$

Уравнения системы линейно зависимы (почему). Для однозначности необходимо добавить какое-либо из условий (2.12).

Задания по Лекции 10.

1. Вывести формулу (2.7).
2. Как можно видоизменить формулы (2.14-2.16) для того, чтобы учесть статистический «вес» различных узлов измерения градиентов (в каких-то узлах градиенты могут измеряться точнее, чем в других)?

Вопросы по Лекции 10.

1. Гартмановский ДВФ. Устройство, принцип работы, позиционная характеристика, чувствительность измерений.
2. Общие принципы восстановления ВФ по измерениям локальных наклонов, случай непрерывных (по пространству) измерений. Влияние шумов измерений.
3. Восстановления ВФ по измерениям локальных наклонов в случае дискретных измерений. Однозначность восстановления ВФ. Схемы Фрида и Хаджина.
4. Восстановления ВФ методом наименьших квадратов.